

Gazdaságmatematika II. - 7. gyakorlat

dr. Földvári Attila

A feladatok Házy Attila: Gazdaságmatematika 2 Példatár a második zárthelyi dolgozathoz című feladatsorából származnak.

- Adott az alábbi konvex poliéder. Határozza meg a poliéder összes extrémális pontját és extrémális irányát! Írja fel a poliéder zárt alakját!

$$3x_1 - 50x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 140$$

$$2x_1 - 40x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

a) Pivotalálás

	x_1	x_2	x_3	x_4	b			e_2	x_2	x_3	x_4	b	
e_1	3	-50	8	-5	140	$\Rightarrow$	e_1	$-\frac{3}{2}$	10	-1	-11	-10	$\Rightarrow$
e_2	2	-40	6	4	100		x_1	$\frac{1}{2}$	-20	3	2	50	
	e_2	x_2	e_1	x_4	b			x_2	x_4	b			
x_3	$\frac{3}{2}$	-10	-1	11	10	$\Rightarrow$	x_3	-10	11	10			
x_1	-4	10	3	-31	20		x_1	10	-31	20			

b) Extrémális pontok, extrémális irányok

α) x_2, x_4 bázis

	x_2	x_4	b		
x_3	-10	11	10	$\Rightarrow$	$P_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$
x_1	10	-31	20		nincs extrémális irány

β) x_1, x_2 bázis

	x_2	x_4	b			x_2	x_1	b	
x_3	-10	11	10	$\Rightarrow$	x_3	$-\frac{200}{31}$	$\frac{11}{31}$	$\frac{530}{31}$	
x_1	10	-31	20		x_4	$-\frac{10}{31}$	$-\frac{1}{31}$	$-\frac{20}{31}$	

nincs extrémális pont $\Rightarrow$ nincs extrémális irány

γ) x_1, x_4 bázis

x_2	x_4	b		x_1	x_4	b	
x_3	-10	11	10	x_3	1	-20	30
x_1	10	-31	20	x_2	$\frac{1}{10}$	$-\frac{31}{10}$	2

extremális pont: $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$, extremális irány: $d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{31}{10} \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}$

δ) x_2, x_3 bázis

	x_2	x_4	b			x_2	x_3	b
x_3	-10	11	10		x_4	$-\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$
x_1	10	-31	20		x_1	$-\frac{200}{11}$	$\frac{31}{11}$	$\frac{530}{11}$

extremális pont: $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{530}{11} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}$, extremális irány: $d_2 = \begin{pmatrix} \frac{200}{11} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}$

ε) x_3, x_4 bázis

	x_2	x_4	b		x_3	x_4	b	
x_3	-10	11	10	$\Rightarrow$	x_2	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{11}{10}$	-1
x_1	10	-31	20		x_1	1	-20	30

nincs extremális pont $\Rightarrow$ nincs extremális irány

ζ) x_1, x_3 bázis

	x_3	x_4	b		x_3	x_1	b	
x_2	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{11}{10}$	-1	$\Rightarrow$	x_2	$-\frac{31}{200}$	$-\frac{11}{200}$	$-\frac{53}{20}$
x_1	1	-20	30		x_4	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{2}$

nincs extremális pont $\Rightarrow$ nincs extremális irány

c) A konvex poliéder zárt alakja:

$$\text{extremális pontok: } P_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} \frac{530}{11} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix},$$

$$\text{extremális irányok: } d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{31}{10} \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} \frac{200}{11} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3 + \mu_1 \cdot d_1 + \mu_2 \cdot d_2$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$



2. Adott az alábbi konvex poliéder. Határozza meg a poliéder összes extremális pontját és extremális irányát! Írja fel a poliéder zárt alakját!

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Átalakítás

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\implies$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\implies$$

$$x_1 - 2x_2 + u_1 = 2$$

$$-x_1 + x_2 + u_2 = 2$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2 \geq 0$$

b) Pivotálás

	x_1	x_2	u_1	u_2	b
e_1	1	-2	1	0	2
e_2	-1	1	0	1	2

$$\implies$$

	x_1	x_2	e_1	u_2	b
u_1	1	-2	1	0	2
e_2	-1	1	0	1	2



	x_1	x_2	e_1	e_2	b
u_1	1	-2	1	0	2
u_2	-1	1	0	1	2



$$\implies$$

	x_1	x_2	b
u_1	1	-2	2
u_2	-1	1	2

c) Extremális pontok, extremális irányok

$\alpha)$ x_1, x_2 bázis

	x_1	x_2	b
u_1	1	-2	2
u_2	-1	1	2



$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nincs extremális irány



$\beta)$ x_1, u_1 bázis

	x_1	x_2	b
u_1	1	-2	2
u_2	-1	1	2



	x_1	u_1	b
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
u_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3



nincs extremális pont $\implies$ nincs extremális irány

$\gamma)$ x_1, u_2 bázis

	x_1	x_2	b
u_1	1	-2	2
u_2	-1	1	2



	x_1	u_2	b
u_1	1	2	6
x_2	-1	1	2



extremális pont: $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, nincs extremális irány



$\delta)$ x_2, u_1 bázis

	x_1	x_2	b
u_1	1	-2	2
u_2	-1	1	2



	u_1	x_2	b
x_1	1	-2	2
u_2	1	-1	4



extremális pont: $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, extremális irány: $d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



ε) x_2, u_2 bázis

	x_1	x_2	b			u_2	x_2	b	
u_1	1	-2	2		u_1	1	-1	4	
u_2	-1	1	2		x_1	-1	-1	-2	

nincs extrémális pont $\implies$ nincs extrémális irány

ζ) u_1, u_2 bázis

	u_2	x_2	b			u_2	u_1	b	
u_1	1	-1	4		x_2	-1	-1	-4	
x_1	-1	-1	-2		x_1	-2	-1	-6	

nincs extrémális pont $\implies$ nincs extrémális irány

d) A konvex poliéder zárt alakja:

extrémális pontok: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

extrémális irány: $d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3 + \mu_1 \cdot d_1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

3. Adott az alábbi konvex poliéder. Határozza meg a poliéder összes extrémális pontját és extrémális irányát! Írja fel a poliéder zárt alakját!

$$6x_1 - 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 - 2x_2 \geq -8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) Átalakítás

$$6x_1 - 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 - 2x_2 \geq -8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$6x_1 - 2x_2 \leq 12$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$6x_1 - 2x_2 + u_1 = 12$$

$$-4x_1 + 2x_2 + u_2 = 8$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2 \geq 0$$

b) Pivotálás

	x_1	x_2	u_1	u_2	b			x_1	x_2	e_1	e_2	b	
e_1	6	-2	1	0	12	$\Rightarrow$	u_1	6	-2	1	0	12	
e_2	-4	2	0	1	8		u_2	-4	2	0	1	8	

	x_1	x_2	b
u_1	6	-2	12
u_2	-4	2	8

c) Extremális pontok, extrémális irányok

$\alpha)$ x_1, x_2 bázis

	x_1	x_2	b		
u_1	6	-2	12	$\Rightarrow$	$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
u_2	-4	2	8		nincs extrémális irány

$\beta)$ x_1, u_1 bázis

	x_1	x_2	b				
u_1	6	-2	12	$\Rightarrow$	x_2	-3	$-\frac{1}{2}$
u_2	-4	2	8		u_2	2	1

nincs extrémális pont $\Rightarrow$ nincs extrémális irány

$\gamma)$ x_1, u_2 bázis

	x_1	x_2	b				
u_1	6	-2	12	$\Rightarrow$	u_1	2	1
u_2	-4	2	8		x_2	-2	$\frac{1}{2}$

extrémális pont: $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$ nincs extrémális irány

δ) x_2, u_1 bázis

	x_1	x_2	b		u_1	x_2	b
u_1	6	-2	12	$\Rightarrow$	x_1	$\frac{1}{6}$	2
u_2	-4	2	8		u_2	$\frac{2}{3}$	16

extremális pont: $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, nincs extremális irány

ε) x_2, u_2 bázis

	x_1	x_2	b		u_2	x_2	b
u_1	6	-2	12	$\Rightarrow$	u_1	$\frac{3}{2}$	24
u_2	-4	2	8		x_1	$-\frac{1}{4}$	-2

nincs extremális pont $\Rightarrow$ nincs extremális irány

ζ) u_1, u_2 bázis

	u_2	x_2	b		u_2	u_1	b
u_1	$\frac{3}{2}$	1	24	$\Rightarrow$	x_2	$\frac{3}{2}$	24
x_1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2		x_1	$\frac{1}{2}$	10

extremális pont: $P_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$, nincs extremális irány

d) A konvex poliéder zárt alakja:

extremális pontok: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$

nincs extremális irány

$$\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3 + \lambda_4 \cdot P_4$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$